

06 maggio 2002

CERTAMEN FISICO – MATEMATICO

"Fabiana D'Arpa"

I candidati risolvano il problema e un quesito a scelta per ciascuno dei gruppi A–B–C–D–E–F

Problema

È data la famiglia di funzioni (dipendenti dal parametro $a \in \mathbb{R}$):

$$\varphi_a(x) = 3x^2 - a \cdot \ln x,$$

dove il simbolo \ln indica il *logaritmo naturale*, ovvero avente base il *numero e di Nepero*.

- a) Individuare i valori di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ per cui, nel loro dominio, le funzioni $\varphi_a(x)$ sono strettamente monotone.
Individuare i valori di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ per cui l'equazione $\varphi_a(x) = 0$ ha due soluzioni distinte.
- b) Posto $a = 6e$, studiare la funzione $g(x) = \varphi_a(x)$ (dominio, asintoti, monotonia, punti di estremo, convessità, continuità, derivabilità).
- c) Provare che la funzione $f(x) = \sqrt{g(x)}$ è definita su $(0; +\infty)$.
Studiare $f(x)$ (asintoti, monotonia, punti di estremo, eventuali punti di non derivabilità).
- d) Tracciare i grafici qualitativi di $g(x)$ e di $f(x)$; metterli a confronto, evidenziando le somiglianze e le differenze relative, in particolare, agli asintoti, ai punti di estremo, alle convessità, agli eventuali punti di non derivabilità.

Gruppo A

Quesito A1

Un proiettile di massa $m = 25 \text{ g}$ e velocità $v = 10 \text{ m/s}$ urta contro una molla a riposo di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$. Di quale Δx si comprime la molla prima che il proiettile si fermi?

Quesito A2

Un satellite geostazionario orbita sull'equatore. A quale altezza H si deve trovare rispetto al suolo perché sia garantita l'orbita stabile?

(Sia M_T la massa della Terra e R_T il suo raggio, T il periodo di rotazione della Terra intorno al suo asse, γ la costante di gravitazione universale).

Gruppo B

Quesito B1

Una mole di gas ideale monoatomico, inizialmente alla pressione atmosferica $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ e alla temperatura ambiente $T_0 = 300 \text{ K}$, viene fatto espandere a pressione costante fino a raddoppiare il suo volume. Quanto valgono il calore Q e il lavoro W scambiati con l'ambiente esterno e la sua variazione di energia interna ΔU ?

$$(R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1})$$

Quesito B2

Se un blocco di ghiaccio fonde a pressione costante, la sua energia interna aumenta, diminuisce o rimane costante? Perché?

Gruppo C**Quesito C1**

Se la densità di portatori in un blocco di silicio lungo 0.1 m vale 10^{19} m^{-3} , la tensione applicata ai suoi capi 160 V e la sua conducibilità elettrica $10^{-3} (\Omega \text{ m})^{-1}$, quanto vale la velocità di scorrimento dei portatori di carica?

Quesito C2

Un'onda elettromagnetica di frequenza $f = 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ si propaga nel vuoto. Quanto vale la sua lunghezza d'onda?

Gruppo D**Quesito D1**

- a) Definire la media integrale di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a;b]$. Enunciare il teorema della media integrale, per una funzione $f(x)$ continua sull'intervallo $[a;b]$.
 b) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\pi x^2) & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 8x + 16 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

b₁) Calcolare la media integrale μ di $f(x)$ sull'intervallo $[0;3]$.

b₂) Dire se esiste $x_0 \in [0;3]$ tale che $f(x_0) = \mu$.

Quesito D2

- a) Data una funzione continua $f(t)$ e un punto $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione integrale di f relativa al punto a

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Se ne descrivano le proprietà note; in particolare si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale (o teorema di Torricelli–Barrow).

- b) Si consideri la funzione $f(t) = e^{-t^2}$, e se ne tracci rapidamente un grafico qualitativo. Si consideri poi la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

SENZA PROVARE AD EFFETTUARE NESSUNA INTEGRAZIONE

si provi che $F(x)$ è definita su \mathbb{R} , che è dispari, che è sempre strettamente crescente, che è concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$.

Gruppo E*Quesito E1*

- a) Illustrare i concetti di probabilità di un evento e di probabilità condizionata.
- b) Nel gioco nazionale del Lotto (dover si estraggono – senza reimbussolarli – 5 numeri tra 1 e 90, sulle ruote di alcune città italiane), qual è la probabilità che il numero 17 venga estratto su una e una sola delle tre ruote di Torino, Milano, Bari?

Quesito E2

- a) Illustrare i concetti di condizionata e il teorema di Bayes.
- b) In un allevamento di conigli, l'1% dei conigli ha una malattia. L'allevatore dispone di un test T per scoprirla, che fallisce nel 2% dei casi. Sottopone il coniglio Bunny al test, e risulta che è malato. Qual è la probabilità che Bunny sia davvero malato?

Gruppo F*Quesito F1*

- a) Dimostrare che l'equazione $x^{57} + 5x + 2 = 0$ ha una e una sola soluzione reale x_0 .
- b) Provare che $-\frac{2}{5} < x_0 < 0$.
- c) Illustrare una tecnica nota di approssimazione delle radici di un'equazione.

Quesito F2

Sia $f(x)$ derivabile due volte su R e tale che $f(1) = f(2) = f(3) = 0$.

- a) Provare che esiste almeno un punto $x_0 \in (1,3)$ in cui $f''(x_0) = 0$.
- b) Enunciare tutte le proprietà utilizzate per risolvere il punto a) del quesito. Dimostrarne una a piacere.

Tempo a disposizione: 4 ore