

12 maggio 2003

## CERTAMEN FISICO – MATEMATICO

### *"Fabiana D'Arpa"*

I candidati risolvano il problema, 2 quesiti a scelta nel gruppo A e 3 quesiti a scelta nel gruppo B

#### Problema

È data la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ .

- a) Trovare il dominio di  $f$ . Provare che  $f$  ha periodo  $2\pi$ .
- b) Studiare la restrizione di  $f$  ad un opportuno intervallo di periodicità (asintoti, monotonia, punti di estremo).
- c) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$  su tutto il suo dominio.
- d) Studiare la funzione  $g(x) = -\ln f(x)$ , dove  $\ln$  indica il logaritmo naturale, cioè in base  $e$  di Nepero (dominio, asintoti, punti di estremo).
- e) A partire dal grafico di  $f(x)$ , tracciare un grafico qualitativo di  $g(x)$ .
- f) Provare che non esistono soluzioni dell'equazione  $f(x) = g(x)$ .

#### Gruppo A

##### Quesito A1

- a) Discutere il numero di radici reali dell'equazione

$$3x^5 - 50x^3 + 135x - k = 0,$$

al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

- b) Enunciare le proprietà teoriche utilizzate per risolvere il punto a) di questo quesito e dimostrarne una a piacere.

##### Quesito A2

È dato l'integrale definito

$$I_n = \int_1^2 \frac{3nx}{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n} dx$$

dove  $n$  è un numero intero strettamente positivo.

- a) Calcolare  $I_n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- b) Calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- c) Definire il numero  $e$  di Nepero e illustrare le proprietà note.

*Quesito A3*

Sia  $f(x)$  una funzione a valori reali definita e continua sull'intervallo  $I = [-1;2]$ , tale che

$$f(-1) = -5, \quad f(2) = 3, \quad \int_{-1}^2 f(x) dx = 12.$$

- Provare che  $f(x)$  ha un punto di massimo assoluto  $x_M$  interno all'intervallo  $I$  e che  $f(x_M) \geq 4$ .
- Enunciare le proprietà illustrate nel punto a) e dimostrarne una a piacere.

*Quesito A4*

Due urne identiche contengono i numeri 5, 8, 13, 25 (e solo questi) e si trovano una a Torino e una a Maglie. I numeri vengono tutti estratti dall'urna, sia a Torino che a Maglie.

- Qual è la probabilità che i primi tre numeri estratti a Torino siano in ordine crescente?
- Qual è la probabilità che il primo numero estratto a Torino sia minore del primo numero estratto a Maglie?

**Gruppo B***Quesito B1*

Una particella di carica positiva  $q = 10^{-5} C$  e massa  $m = 10^{-4} kg$  viene accelerata per un tempo  $t_1 = 5 s$  in un campo elettrico stazionario  $E = 1 V/m$  percorrendo uno spazio  $s_1$ . Il campo elettrico viene poi spento e la particella continua a muoversi per un ulteriore tempo  $t_2 = 5 s$  senza interazioni percorrendo uno spazio  $s_2$ . Quanto vale lo spazio totale  $s = s_1 + s_2$  percorso dalla particella?

*Quesito B2*

Una goccia di olio di massa  $m = 0.01 g$  cade per forza di inerzia tra le armature di un condensatore a facce piane parallele che crea un campo elettrico uniforme  $E = 1 V/m$  antiparallelo al vettore accelerazione di gravità. La goccia percorre la distanza  $L = 10 cm$  in un tempo  $t = 1 s$ . Quanto vale la carica  $q$  della goccia?

*Quesito B3*

Due onde elettromagnetiche piane e monocromatiche di lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 400 nm$  e  $\lambda_2 = 600 nm$  si propagano in un mezzo che presenta indice di rifrazione  $n = 1.5$  ad entrambe le lunghezze d'onda. Quanto vale la loro velocità?

*Quesito B4*

Una mole di gas ideale viene espanso isotermicamente in modo da raddoppiare il suo volume. Se l'esperimento è condotto a due temperature  $T_1$  e  $T_2$ , con  $T_2 = 2T_1$ , calcolare, giustificandola teoricamente, la variazione di energia interna del gas  $\Delta E_1$  e  $\Delta E_2$  nei due casi.

*Quesito B5*

Una mole di gas ideale monoatomico viene posto in un contenitore stagno indeformabile e scaldato tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$ , con  $T_2 - T_1 = 100^\circ K$ . Quanto calore è stato necessario fornire al gas e quanto vale la variazione della sua energia interna?

*Quesito B6*

Una sorgente puntiforme monocromatica nel vuoto emette in modo isotropo radiazione elettromagnetica polarizzata linearmente, con una potenza  $P = 100 W$ . Considerati due punti a distanza  $r_1$  e  $r_2$ , con  $r_2 > r_1$ , in che rapporto stanno i massimi del modulo del vettore campo elettrico  $E(r_2) / E(r_1)$  ?