

3 maggio 2004

I CANDIDATI RISOLVANO IL PROBLEMA, DUE QUESITI A SCELTA NEL GRUPPO A E DUE QUESITI A SCELTA NEL GRUPPO B.

PROBLEMA

È data la funzione:

$$f(x) = e^{\frac{x}{t}} (x^2 - 3x + 2)$$

dove t è un parametro reale.

- a) Si verifichi che, $\forall t \neq 0$, $f(x)$ ha un unico punto di massimo. Si esprima la funzione $\phi(t)$ che descrive l'ascissa del punto di massimo, al variare di $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) Si studi la funzione $\phi(t)$.

In particolare, se ne determinino il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia e gli intervalli di convessità. Si calcolino inoltre i limiti

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi'(t) \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^-} \phi'(t).$$

- c) Si tracci un grafico qualitativo di $\phi(t)$, che tenga conto dei risultati trovati in precedenza.
- d) Si descriva l'insieme immagine di $\phi(t)$ (cioè l'insieme dei valori che la funzione assume al variare di t nel suo dominio), e si trovino i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $\phi(t) = a$ NON ha soluzioni.
- e) Si enuncino i teoremi noti che riguardano l'immagine delle funzioni definite su un dato intervallo e si dica quali di essi sono applicabili alla funzione $\phi(t)$, specificando gli intervalli di riferimento.

QUESITI GRUPPO A

Quesito A1

Si consideri la successione $a_n = \frac{1}{1+(3x)^n}$, dove x è un numero reale strettamente positivo.

- a) Si calcoli il limite di tale successione e si ponga $l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- b) Si disegni il grafico della funzione $l(x)$.
- c) Si disegni infine il grafico della funzione $f(x) = l(x) + \frac{1+x}{x - \frac{1}{3}}$.

Quesito A2

- a) Sia $f : R \rightarrow R$ una funzione derivabile in un intervallo I , e siano $a, b \in I$ due zeri di f . Provare che

$$(*) \quad \int_a^b x f'(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

- b) Applicando la (*) alla funzione $f(x) = \frac{1}{9} (\ln x)^2 - 1$, verificare che

$$(**) \quad \int_{e^{-3}}^{e^3} x f'(x) dx = - \int_{e^{-3}}^{e^3} f(x) dx$$

- c) Sfruttando la relazione (***) e il teorema della media integrale, dare una valutazione per eccesso e per difetto dell'integrale

$$\int_{e^{-3}}^{e^3} f(x) dx.$$

Quesito A3

Sia $f : R \rightarrow R$ una funzione derivabile su R tale che $x \leq f(x) \leq x + \frac{2|x|}{3}$, $\forall x \in R$.

- a) Calcolare $f(0)$ ed $f'(0)$.
- b) Nell'ipotesi che $f(x)$ ammetta un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ di equazione $y = mx + q$, stabilire una limitazione inferiore e superiore per m .
- c) Si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

dove f è una qualunque funzione che soddisfa le ipotesi scritte inizialmente.

Calcolare $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ e dedurre che la funzione F ha nell'origine degli assi un minimo relativo.

Quesito A4

Si estraggono (senza reinserimenti) due carte da un mazzo di 52 carte.

- Calcolare la probabilità p che la seconda carta estratta sia un asso, sapendo che la prima carta estratta è un asso.
- Calcolare la probabilità P che la seconda carta estratta sia un asso, qualunque sia stata la prima carta estratta.
- Esporre i concetti di probabilità, di probabilità condizionata e illustrare i risultati noti al riguardo.

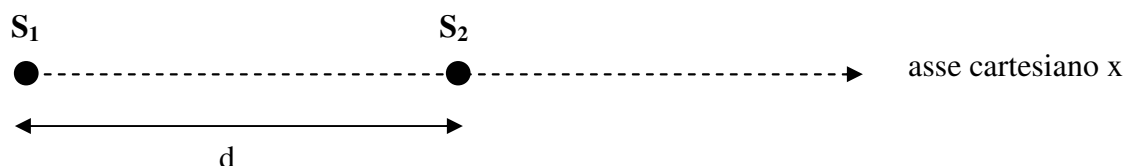
QUESITI GRUPPO B

Quesito B1

Una goccia di pioggia di massa $m = 5 \text{ g}$ cade da una nuvola da una altezza $h = 2 \text{ km}$. Si può supporre che sulla goccia agiscano solo due forze: la forza di gravità F_g e la forza di frenamento F_a dell'aria (proporzionale alla velocità al quadrato v^2 della goccia).

- Se la goccia arriva al suolo con una velocità costante $v_f = 5 \text{ m/s}$, determinare il valore della costante di proporzionalità α che determina la forza di frenamento dell'aria ($F_a = -\alpha v^2$). Della stessa costante effettuare l'analisi dimensionale e determinare le unità di misura nel Sistema Internazionale.
- Se l'azione di frenamento dell'aria fosse assente, determinare la velocità v_f con cui arriverebbe la goccia al suolo.
- In entrambi i casi (1) e (2) determinare la forza che esercita la goccia colpendo una superficie al suolo posta perpendicolarmente alla sua traiettoria, supponendo l'interazione assimilabile ad un urto elastico di durata $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

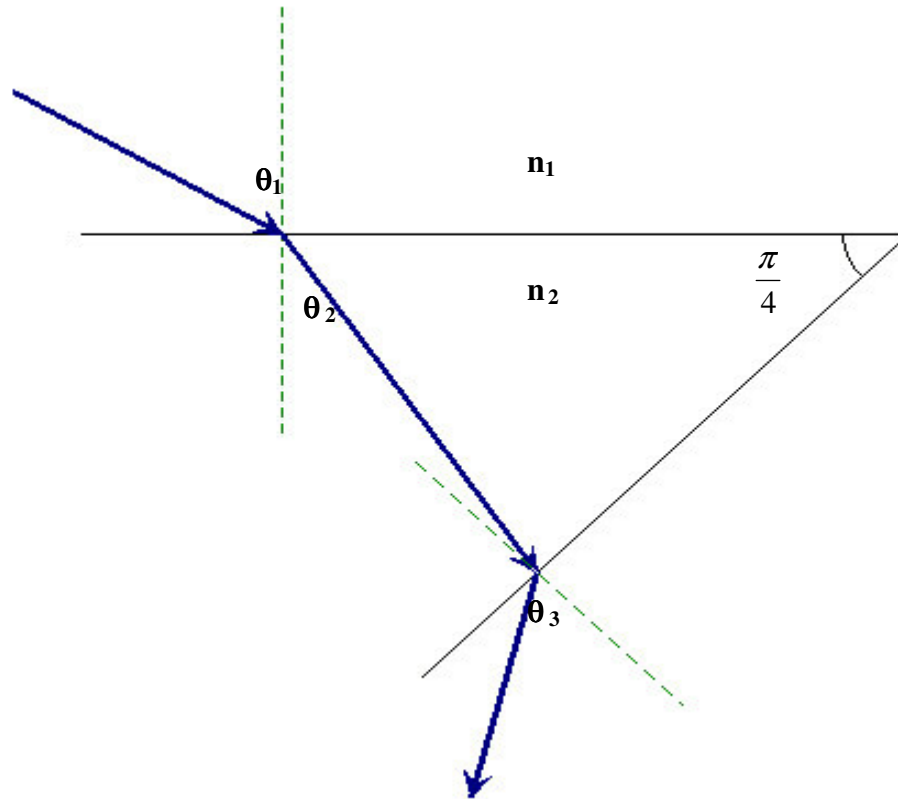
Quesito B2



Due sorgenti sonore puntiformi identiche emettono isotropicamente due onde sonore sinusoidali, con la stessa fase iniziale e con la stessa frequenza.

Supponendo λ la lunghezza d'onda delle onde che si propagano con una velocità v , determinare per quali valori della distanza d tra le sorgenti un osservatore non percepisce alcun suono nel punto $x = d/2$.

Quesito B3



Un fascio laser monocromatico incide con un angolo θ_1 su un prisma di quarzo a sezione triangolare (vedi figura) con le due facce che si incontrano formando un angolo di 45° .

Sapendo che l'indice di rifrazione del quarzo vale $n_2 = 1.45$ (mentre quello dell'aria $n_2 = 1$), valutare se esiste un angolo θ_1^* minimo per garantire l'uscita del fascio dalla seconda faccia.

Mettendosi quindi nella condizione $\theta_1 > \theta_1^*$ determinare l'angolo θ_3 di uscita del fascio.

Quesito B4

Una mole di gas ideale monoatomico in equilibrio termodinamico è chiusa in un contenitore adiabatico di volume $V_0 = 1$ litro alla temperatura $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Se il volume viene dimezzato, determinare:

- (1) il valore di temperatura T_1 e pressione p_1 nelle nuove condizioni di equilibrio;
- (2) il lavoro meccanico W che è stato assorbito dal gas durante la compressione;
- (3) la variazione di entropia ΔS del gas nell'ipotesi di trasformazione reversibile.