

LICEO SCIENTIFICO STATALE "Leonardo da Vinci" MAGLIE**IV CERTAMEN FISICO - MATEMATICO "FABIANA D'ARPA"**

02 maggio 2005

I candidati risolvano

- *Il problema del gruppo A o quello del gruppo B*
- *Due quesiti a scelta nel gruppo A*
- *Due quesiti a scelta nel gruppo B*

PROBLEMA GRUPPO A

- a) Si studi la funzione: $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 2e^x}$.

In particolare, se ne determini il dominio, il segno, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo (relativi e assoluti). Si tracci un grafico qualitativo di $f(x)$, che tenga conto dei risultati trovati in precedenza. (N.B. Non è richiesto il calcolo della derivata seconda.)

- b) Si consideri l'equazione, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$(*) \quad k e^{2x} - 2k e^x - 1 = 0$$

- b.1. Si discuta il numero di soluzioni di tale equazione, al variare di $k \in \mathbb{R}$, mettendo in relazione la discussione con i risultati trovati in a).
- b.2. Posto $k = 1$, si provi che l'equazione (*) ha una sola soluzione x_0 e si provi che $\ln 2 < x_0 < 1$.

QUESITI GRUPPO A**Quesito A1**

Si consideri la funzione $g(x) = \cos(\ln x)$.

- Trovare le ascisse dei punti di massimo e le ascisse dei punti di minimo di $g(x)$.
- Considerare la successione $\{x_n\}$ delle ascisse dei punti di massimo maggiori o uguali a 2 e la successione $\{y_n = g(x_n)\}$ delle ordinate dei punti della successione $\{x_n\}$. Dire se le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ ammettono limite, e, in caso affermativo, trovarlo.

Quesito A2

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intorno di $x_0 = 0$, e sia $f(x) = \varphi(x)(e^{x^2} - 1)$.

- Provare che $f(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$ e calcolare $f'(0)$.
- Si supponga ora che $\varphi(0) = 1$ e che $\varphi(x)$ sia derivabile in un intorno di $x_0 = 0$. Si provi che $f(x)$ è derivabile due volte in $x_0 = 0$ e si calcoli $f''(0)$.

Quesito A3

È data la funzione

$$f(x) = 3 - \frac{16}{x^2 + 4x + 8} - e^{-2x}.$$

- Provare che f è strettamente monotona (e dunque invertibile) sull'intervallo $I = [0; 1]$.
Indicata con f^{-1} l'inversa della funzione f ristretta all'intervallo I , determinare l'intervallo $J = [a; b]$ dominio di f^{-1} .
- Calcolare $\int_0^1 f(x) dx$.
- Utilizzando i risultati trovati in (i) e in (ii), calcolare $\int_a^b f^{-1}(y) dy$.

Quesito A4

Il Signor Rossi viene fermato un sabato sera alla guida della sua auto dalla Polizia Stradale e sottoposto al test dell'etilometro per rivelare se è sobrio.

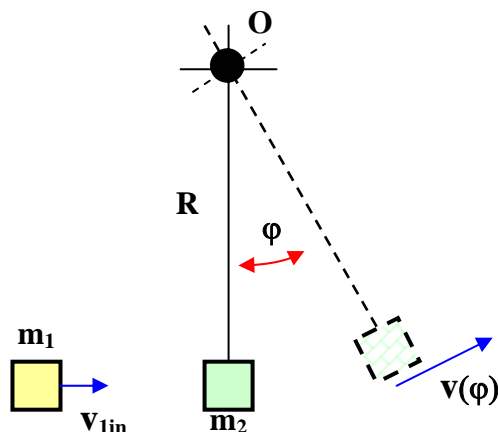
Il test dà un risultato positivo (cioè secondo il test il Signor Rossi è ubriaco).

Il Signor Rossi si informa e viene a sapere che:

- l'affidabilità del test è del 79% se il guidatore è ubriaco e del 90% se è sobrio;
- il sabato sera il 3% della popolazione italiana nella fascia di età del Signor Rossi guida in stato di ebbrezza.

Qual è la probabilità che il Signor Rossi sia effettivamente ubriaco?

PROBLEMA GRUPPO B

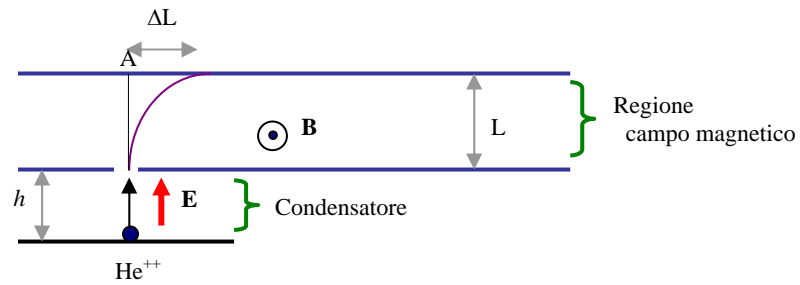


La massa m_2 , fissata all'estremità di un'asta rigida e di massa trascurabile di lunghezza R , è libera di ruotare nel piano verticale attorno al punto O . La massa m_1 procede con velocità v_{1in} e urta elasticamente m_2 . Tutti gli attriti sono trascurabili.

1. Scrivere l'espressione del modulo della velocità $v(\varphi)$ di m_2 e disegnarne il grafico in funzione dell'angolo φ che individua la posizione di m_2 lungo la sua traiettoria, considerando v_{1in} come parametro. Discutere le caratteristiche del moto al variare di v_{1in} . In particolare, qual è la minima velocità $(v_{1in})_{min}$ necessaria affinché m_2 compia un intero giro intorno ad O ?
2. Supponendo che la velocità v_{1in} sia "piccola" (precisare quanto), il moto di m_2 dopo l'urto è molto semplice. Ricavare l'espressione di $\varphi(t)$, ossia la posizione di m_2 in funzione del tempo.
3. Nel caso di una v_{1in} generica, calcolare la velocità angolare di m_2 in funzione di φ , $\omega(\varphi) = d\varphi/dt$, e da questa ricavare l'espressione formale del tempo t necessario affinché la massa m_2 raggiunga la generica posizione φ , $t = t(\varphi)$. Discutere la possibilità di ottenere un'espressione esplicita in forma chiusa di $t = t(\varphi)$ e di poterla invertire ottenendo $\varphi = \varphi(t)$.
4. Sempre nel caso di una v_{1in} generica, calcolare l'accelerazione angolare di m_2 in funzione di φ , $\alpha(\varphi) = d\omega/dt$.

QUESITI GRUPPO B

Quesito B1



Un atomo di elio doppiamente ionizzato viene accelerato in un condensatore a facce piane e parallele tra le cui armature è presente un campo elettrico uniforme E . Quindi entra in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme B , perpendicolare al piano del foglio. Se $h = 0.5$ m, $L = 1$ m, $E = 1$ V/m, $B = 10^{-4}$ T, determinare la distanza ΔL da A del punto di impatto dell'atomo di He. Si ricordi $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C (carica dell'elettrone), $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg (massa del protone).

Quesito B2

Una lente sottile biconvessa è costituita da due superfici sferiche uguali e da un materiale con indice di rifrazione n . Essa forma un'immagine di un oggetto su uno schermo posto alla distanza L_S dalla lente. Quando la lente è allontanata dall'oggetto della quantità ΔL_0 , lo schermo deve essere avvicinato all'oggetto della quantità ΔL_S per mantenere l'immagine a fuoco.

Determinare la lunghezza focale e il raggio di curvatura delle superfici della lente.

Dati: $n = 1.5$, $L_S = 12$ cm, $\Delta L_S = 2$ cm, $\Delta L_0 = 2$ cm.

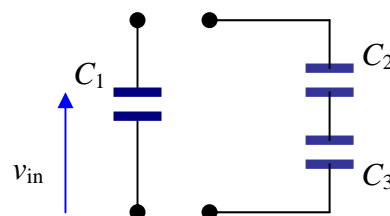
Quesito B3

Una goccia di pioggia cadendo nell'atmosfera si muove verso il suolo con una velocità descritta dalla legge

$$v(t) = C_1(1 - e^{-bt})$$

dove C_1 e b sono costanti positive. Sapendo che la sua velocità limite vale $v_{\text{lim}} = 3$ m/s, determinare il valore numerico, nel sistema internazionale, delle costanti C_1 e b . Calcolare quindi lo spazio percorso nel primo secondo di caduta.

Quesito B4



Un condensatore con capacità C_1 è carico ad una differenza di potenziale V_{in} . I terminali del condensatore carico vengono poi collegati a quelli di una coppia di condensatori connessi in serie, di capacità C_2 e C_3 , entrambi scarichi. Calcolare le cariche e le differenze di potenziale di ciascun condensatore dopo il collegamento.

Dati: $C_1 = 20$ μ F, $C_2 = C_3 = 10$ μ F, $V_{\text{in}} = 1000$ V.