CERTAMEN FISICO - MATEMATICO “ FABIANA d’ARPA ”

15 maggio 2006

I CANDIDATI RISOLVANO:
-IL PROBLEMA DEL GRUPPO A oppure IL PROBLEMA DEL GRUPPO B (a scelta)
-DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO A e DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO B.

PROBLEMA GRUPPO A

Si considerino le funzioni

$$f_a(x) = x^a - ax$$

con $x \geq 0,\ 0 < a < 1$

a) Si studino le funzioni $f_a(x)$ per $a = \frac{1}{2}$ e per $a = \frac{1}{3}$: in particolare se ne determini il dominio, gli zeri, il segno, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo (relativi e assoluti).
Si scriva l’equazione della retta tangente al grafico delle due funzioni nel punto di ascissa $x = 0$.
Si riportino i grafici delle due funzioni su uno stesso sistema di assi cartesiani.

b) Si considerino le due intersezioni delle funzioni f_a con l’asse delle x.
Sia $z(a)$ lo zero di $f_a(x)$ diverso da $x = 0$.
Si studi $\lim\limits_{a \to 0^+} z(a)$ e $\lim\limits_{a \to 1^-} z(a)$.

c) Si deduca dai risultati precedenti l’andamento qualitativo delle funzioni $f_a(x)$, e si riportino i grafici di alcune di esse sullo stesso grafico delle funzioni $f_{\frac{1}{2}}(x)$ e $f_{\frac{1}{3}}(x)$. In particolare si disegni un grafico qualitativo di una funzione f_a con a prossimo a 0 e di una con a prossimo a 1.

d) Si deduca il grafico delle funzioni $g_a(x) = f_a(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$.
Si dica se le funzioni $g_a(x)$ sono continue e derivabili su $\mathbb{R}$.

QUESITI GRUPPO A

Quesito A1

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo $I = [a, b]$.

Ricordiamo le seguenti definizioni:

valor medio di φ su I $\qquad m(\varphi) := \dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$

valor medio integrale di φ su I $\qquad \mu(\varphi) := \dfrac{\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x}{b - a}$

a) Si enuncino il teorema del valor medio (o di Lagrange) e il teorema del valor medio integrale (o teorema della media integrale), e se ne dimostri uno a scelta.

b) Sia $f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ e sia $F(x)$ la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

Si dica quale relazione intercorre tra il valor medio di $F(x)$ e il valor medio integrale di $f(x)$ sull'intervallo $J = [2, 3]$.

c) Si applichi il teorema del valor medio a $F(x)$ su J e il teorema del valor medio integrale a $f(x)$ su J, e si confrontino i due risultati.

d) Siano $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ e $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$; si considerino i punti A e B appartenenti al grafico di F di ascissa $x_A = 2$ e $x_B = 3$. Provare che esiste un solo punto C (di ascissa appartenente all'intervallo $J = [2, 3]$) in cui la tangente al grafico di F è parallela alla retta AB.

Quesito A2

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, siano $x_0 \in Dom(f)$ e I un intervallo, $I \subseteq Dom(f)$.

a) Dire che cosa significa che f è convessa (o volge la concavità verso l'alto) e che cosa significa che f è concava (o volge la concavità verso il basso) in x_0 e in I.

b) Supponendo f derivabile due volte, esporre i legami noti tra i concetti di concavità, convessità e opportune proprietà delle derivate di f.

Si supponga ora f derivabile due volte e convessa su $\mathbb{R}$

c) Provare che se $f(0) = f(1)$, allora f ha un punto di minimo di ascissa $x = \xi$, con $\xi \in (0, 1)$.

d) Provare che se $f(0) = f(1) = f(2) = k$, allora $f(x) = k$, per ogni x nell'intervallo $[0, 2]$.

Quesito A3

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

b) Provare che i grafici delle funzioni $f(x) = e^{-2x}$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$ non possono avere più di 3 punti di intersezione, qualunque siano i valori di $b, c \in \mathbb{R}, a \in R \setminus \{0\}$.

(Suggerimento: procedere per assurdo)

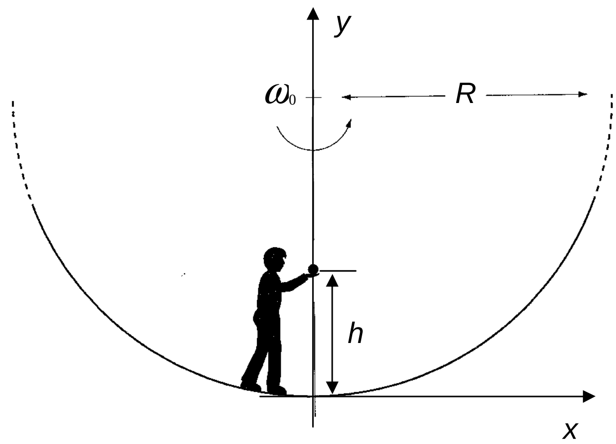
Quesito A4

(a) Illustrare i concetti di probabilità di un evento, di probabilità condizionata, di eventi indipendenti e di eventi incompatibili, e le leggi note riguardanti tali concetti.

(b) Un fucile spara dei proiettili ciascuno dei quali ha probabilità dell'80% di colpire il bersaglio (e dunque ha probabilità del 20% di mancarlo).

Dire quanti proiettili si devono sparare affinchè la probabilità di colpire il bersaglio sia almeno del 99.9%.

PROBLEMA GRUPPO B



Una grande stazione spaziale ha la forma di un cilindro di raggio $R = 100$m. Allo scopo di creare al suo interno una forza di gravità artificiale, il cilindro viene fatto ruotare attorno al suo asse con velocita angolare ω_0, rispetto a un sistema di riferimento inerziale S. L'asse di rotazione è fisso in S.

1. Determinare ω_0 in modo che la forza di gravità artificiale creata sulla superficie laterale del cilindro sia uguale a quella che si ha sulla Terra.

2. Sia h la quota di un generico punto dentro al cilindro, misurata rispetto alla superficie laterale. Calcolare l'accelerazione di gravità artificiale $g(h/R)$ e rappresentarla in un grafico, insieme con l'analoga quantità $g_T(h/R)$ relativa alla Terra, dove in questo caso h è la quota del punto rispetto alla superficie terrestre e R il raggio terrestre.

3. Un oggetto, tenuto alla quota h da un astronauta, viene lasciato cadere. Descrivere il moto dell'oggetto nel riferimento S e nel riferimento dell'astronauta A. Determinare il tempo T_c necessario affinchè l'oggetto raggiunga il pavimento e la posizione del punto di caduta.

4. L'oggetto viene quindi lanciato da un punto del pavimento e si vuole che ritorni nello stesso punto in un tempo assegnato T_r.

   - Vi sono dei limiti al tempo T_r?
   - Supposto T_r=5s, con quale velocità nel riferimento A e in che direzione rispetto alla "verticale" locale deve essere lanciato?

QUESITI GRUPPO B

Quesito B1

Una massa puntiforme $m = 1$g si muove su un piano orizzontale con legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) &= t - 9 \\ y(t) &= 1 - \sqrt{1 - (t-11)^2} \end{cases} \tag{1}$$

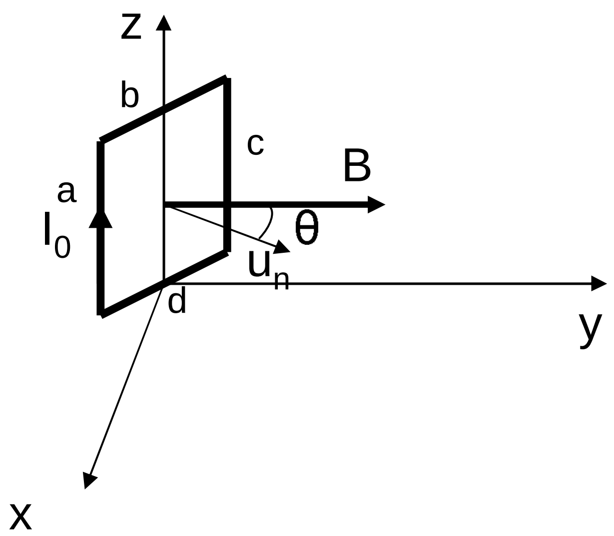
dove le lunghezze sono misurate in metri, i tempi in secondi e $11 \leq t \leq 12$.

1. Disegnare il grafico della traiettoria su un piano cartesiano.
2. Determinare le componenti della forza che agisce sulla particella e il relativo modulo.

Quesito B2

Un cilindro a base circolare di area A=1 dm^2 e volume V_0=1 dm^3, chiuso da un pistone privo di massa che può scorrere senza attrito, contiene N atomi di argon alla temperatura $T = 27$°C. Determinare il numero di atomi contenuti.
Se sul pistone viene appoggiata una massa $m = 50$kg, che genera una trasformazione isoterma reversibile del gas, determinare il volume e la pressione del cilindro dopo la trasformazione.
(Costante di Boltzmann $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$J/°K)

Quesito B3



Discutere in generale le forze che agiscono su un circuito percorso da corrente immerso in un campo magnetico.
In particolare si consideri una spira quadrata di lato ℓ, percorsa dalla corrente I_0 ed immersa in un campo magnetico uniforme diretto nella direzione y e con densità di flusso pari a B. La perpendicolare $\mathbf{u_n}$ al piano della spira forma un angolo θ con l'asse y. Calcolare le forze su ciascun lato del circuito e descriverne l'effetto.
Dati: $B = 0.2$T, $\ell = 0.06$m, $I_0 = 10$A, $\theta = 60°$.

Quesito B4

Due atomi di deuterio danno origine ad un atomo di elio se i rispettivi nuclei sono avvicinati ad una distanza $d = 10^{-15}$m nel processo che viene chiamato fusione nucleare.
Calcolare la velocità minima con cui un atomo di deuterio deve essere sparato contro un altro atomo immobile per far avvenire la fusione.
Sapendo che il peso atomico di un atomo di deuterio vale M_D=2.0159 uma e il peso atomico di un atomo di elio vale M_{He}=4.0026 uma, calcolare l'energia prodotta da un singolo processo di fusione.
(Si ricordi: 1 uma = $1.6604 \cdot 10^{-27}$ kg; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m)