

## LICEO SCIENTIFICO STATALE "Leonardo da Vinci" MAGLIE

## VI CERTAMEN FISICO - MATEMATICO "FABIANA D'ARPA"

07 maggio 2007

I CANDIDATI RISOLVANO

- IL PROBLEMA DEL GRUPPO A oppure IL PROBLEMA DEL GRUPPO B (a scelta)
- DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO A e DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO B.

**PROBLEMA GRUPPO A**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{\ln|x|}$$

(dove  $\ln$  indica il logaritmo naturale, cioè con base il numero  $e$  di Nepero).

- a) Si studi la funzione  $f(x)$ ; in particolare se ne determini dominio, eventuali simmetrie, eventuali zeri, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo e minimo (relativi ed assoluti).
- b) Si provi che l'equazione  $f(x) = k$  (dove  $k$  è un parametro reale) non ha soluzioni se  $0 \leq k \leq 10$ .
- c) Si consideri la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si dica se  $g(x)$  è continua e se è derivabile in  $x = 0$ .

- d) Si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_{\frac{11}{10}}^x f(t) dt$$

definita sull'intervallo  $I = \left[ \frac{11}{10}; +\infty \right[$ .

SENZA ESEGUIRE NESSUNA INTEGRAZIONE, ma utilizzando i risultati del punto a):

- d1) provare che  $F(x)$  è strettamente crescente;
- d2) provare che  $F(x)$  ha un punto di flesso di ascissa  $x = e^{1/4}$  e trovare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $F(x)$  in tale punto;
- d3) tracciare un grafico qualitativo di  $F(x)$ ,  $x \in I$ .

**QUESITI GRUPPO A****Quesito A1**

Si considerino gli intervalli  $I_n = \left[-n; \frac{1}{2n}\right]$ , dove  $n \in \mathbb{N}_0$ , e si indichi con  $l(n)$  la lunghezza dell'intervallo  $I_n$ .

- a) Si calcolino  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$  e  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ .
- b) Si calcoli il limite della funzione  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l(n)}{n}$ .
- c) Si disegni il grafico della funzione  $l(n)$ .

**Quesito A2**

- a) Disegnare rapidamente un grafico qualitativo della funzione  $f(x) = x \ln x$ .
- b) Provare che l'equazione  $x - 1 = x \ln x$  ha solo la soluzione  $x = 1$ .
- c) Provare che, se  $m \in \mathbb{R}$  e  $m > 1$ , l'equazione  $m(x - 1) = x \ln x$  oltre alla soluzione  $x = 1$ , ha una seconda soluzione  $x = \xi$ , con  $e^{m-1} < \xi < e^m$ .

**Quesito A3**

- a) Calcolare, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , l'integrale indefinito  $\int \sin t \sin(kt) dt$ .  
(Ricordare che  $\sin \alpha \sin \beta = 1/2 [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ ).
- b) Studiare, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , i possibili valori del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^{2x+1} \sin t \sin(kt) dt \right).$$

**Quesito A4**

- a) Illustrare i concetti di disposizioni e di combinazioni (semplici e con ripetizione) di  $n$  elementi presi a  $k$  a  $k$ , e le formule note riguardanti tali concetti.
- b) Un gruppo di 9 invitati a un cocktail party (tra cui il signor Rossi) si contendono gli ultimi 5 cocktail rimasti.

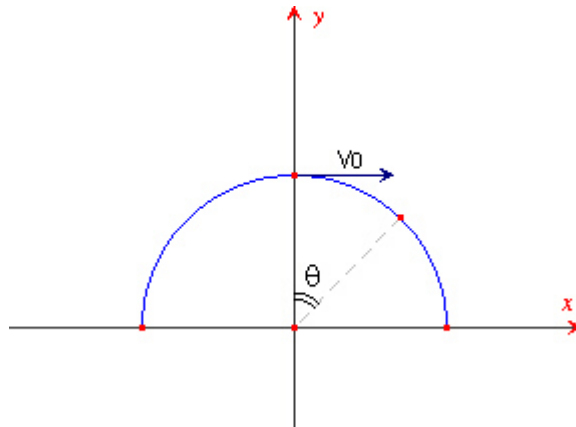
In quanti modi diversi si possono accaparrare i bicchieri, nei seguenti casi

- b1) se tutti i cocktail sono uguali e se ogni invitato può prendere un solo bicchiere
- b2) se tutti i cocktail sono uguali e se ogni invitato può prendere più di un bicchiere
- b3) se tutti i cocktail sono diversi e se ogni invitato può prendere un solo bicchiere
- b4) se tutti i cocktail sono diversi (tra essi c'è un Bloody Mary) e se ogni invitato può prendere più di un bicchiere.

In questo caso, qual è la probabilità che il signor Rossi riesca ad appropriarsi di un cocktail?  
E quale è la probabilità che il signor Rossi riesca a prendere proprio il suo preferito Bloody Mary?

In questo caso, qual è la probabilità che il signor Rossi riesca ad appropriarsi di un cocktail?

## PROBLEMA GRUPPO B



Uno sciatore parte dalla sommità di una collina di forma semisferica di raggio  $R$  con velocità  $v_0$ . Supponendo trascurabile l'attrito con la neve e con l'aria, calcolare:

1. L'angolo  $\theta_d$  (misurato a partire dalla verticale) in corrispondenza del quale egli si staccherà dalla superficie.
2. La velocità al momento del distacco.
3. La posizione del punto di caduta alla base della collina, assumendo  $R = 200 \text{ m}$  e  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ . Calcolare, inoltre, la velocità dell'impatto al suolo e l'angolo che il vettore velocità forma con la verticale (angolo di impatto).

Discutere qualitativamente che cosa accade se l'attrito non è trascurabile, ma è caratterizzato da un coefficiente d'attrito dinamico  $\mu_d$ . In particolare, l'angolo di distacco  $\theta_d$  cresce o diminuisce ?

## QUESITI GRUPPO B

### Quesito B1

Tre ragazzi, tutti di ugual massa  $m = 37,4 \text{ kg}$ , costruiscono una zattera con tronchi di diametro  $d = 32,0 \text{ cm}$  e lunghezza  $L = 1,77 \text{ m}$ . Quanti tronchi saranno necessari per tenere a galla i ragazzi, se la densità del legno vale  $\rho = 757,7 \text{ kg/m}^3$  ?

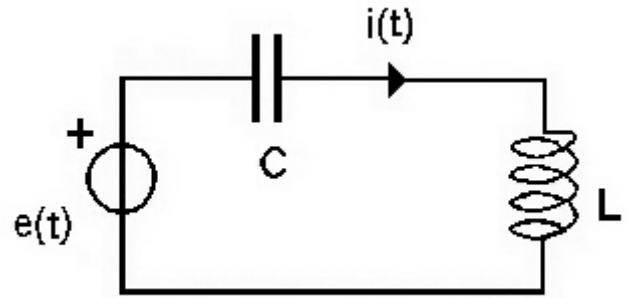
### Quesito B2

Il circuito di figura è costituito da una capacità di valore  $C$  e da un'induttanza di valore  $L$ , connessi in serie e alimentati da un generatore di tensione sinusoidale

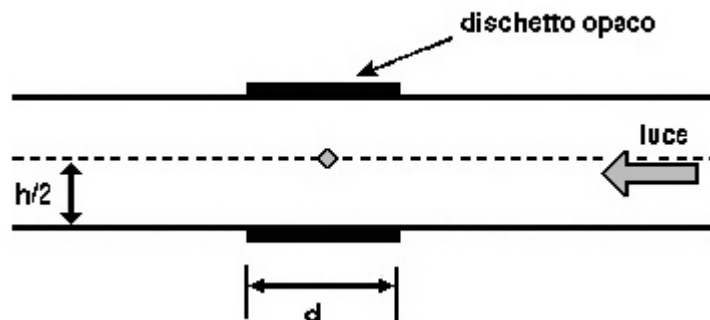
$$e(t) = e_0 \sin \omega t .$$

Ricavare l'espressione della corrente nel circuito  $i(t)$ .

Disegnare, inoltre, il grafico della corrente massima in funzione della frequenza.



### Quesito B3



Una lastra di vetro in aria, con indice di rifrazione  $n_v = 1,5$  e spessore  $h = 2 \text{ cm}$ , contiene sul piano mediano una bolla d'aria di dimensioni trascurabili. Un fascio di luce si propaga all'interno della lastra e colpisce la bolla dando luogo a luce diffusa in tutte le direzioni. Incollando su entrambe le facce della lastra due dischetti opachi si riesce ad impedire che i raggi diffusi dalla bolla entrino nelle due regioni adiacenti alla lastra. Qual è il minimo diametro  $d$  dei dischetti ?

### Quesito B4

Un blocchetto di alluminio (massa  $m_{Al} = 150 \text{ g}$ ), che si trova inizialmente alla temperatura di  $20^\circ\text{C}$ , è messo in contatto, in un contenitore isolato adiabaticamente, con  $4 \text{ g}$  di vapore saturo a  $100^\circ\text{C}$ . Supponendo che il vapore condensi completamente e che l'acqua si porti in equilibrio termico con l'alluminio, quanto vale la temperatura finale del sistema ?

Il calore latente di evaporazione/condensazione per l'acqua è  $\lambda = 539 \text{ cal/g}$ , il calore specifico dell'alluminio è  $c_{Al} = 0,217 \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}$ .