LICEO SCIENTIFICO STATALE "*Leonardo da Vinci*" MAGLIE

VII CERTAMEN FISICO – MATEMATICO "FABIANA D'ARPA"

12 maggio 2008

I CANDIDATI RISOLVANO

- *IL PROBLEMA DEL GRUPPO A oppure IL PROBLEMA DEL GRUPPO B (a scelta)*
- *DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO A* e *DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO B.*

PROBLEMA GRUPPO A

È data la funzione

$$f(x) = x^4 - 2\sqrt{\ln x}$$

(dove $\ln$ *indica il logaritmo naturale, cioè con base il numero* e *di Nepero).*

a) *Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.*

b) *Provare che* $f(x)$ *ha un unico punto a tangente orizzontale di ascissa* α*, e dire tra quali interi consecutivi cade* α.

c) *Determinare gli intervalli di monotonia di* $f(x)$ *e provare che il punto di ascissa* $x = \alpha$ *è un punto di minimo assoluto per* $f(x)$.

d) *Provare che* $f(x)$ *non ha zeri.*

e) *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di* $f(x)$ *nel punto di ascissa* $x = 1$.

f) *Tenendo conto dei risultati ottenuti nei punti precedenti, disegnare un grafico qualitativo di* $f(x)$.

g) *Discutere (graficamente, senza eseguire calcoli) il numero di soluzioni dell'equazione* $f(x) = k$*, al variare del parametro reale k.*

h) *Indicare con* $N(k)$ *il numero di soluzioni dell'equazione* $f(x) = k$*, al variare di* $k \in \mathbb{R}$. *Tracciare il grafico della funzione* $N(k)$.

QUESITI GRUPPO A

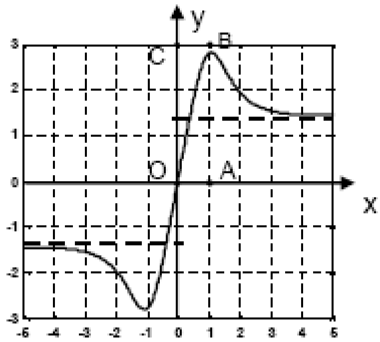
Quesito A1

(A) Sia $f(x)$ *una funzione dispari, derivabile due volte su* $\mathbb{R}$*, con derivate continue.*

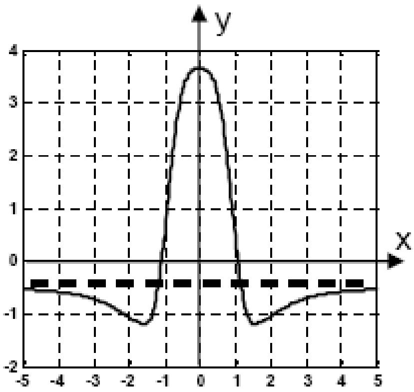
- *Provare che la funzione derivata* $f'(x)$ *è pari.*

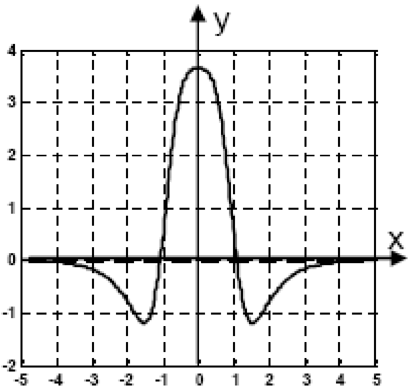
- *Provare che la funzione integrale* $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ *è pari.*

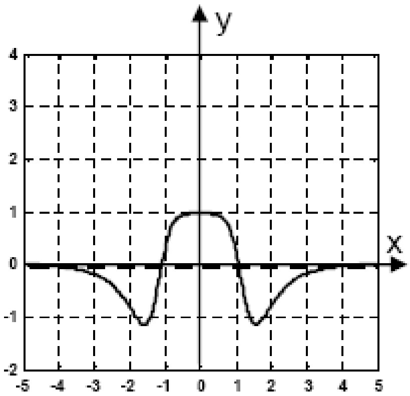
(B) Si consideri la funzione $g(x)$ *di grafico*



- *Dire (motivando la scelta con opportune ragioni teoriche) quale dei tre grafici sottostanti può essere il grafico della funzione derivata* $g'(x)$.

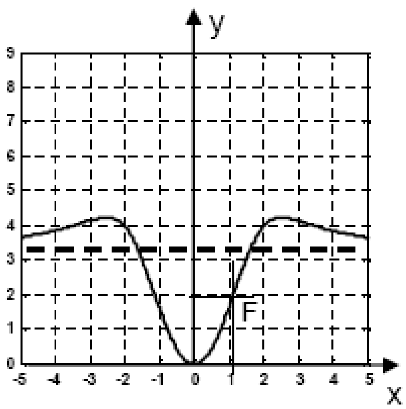


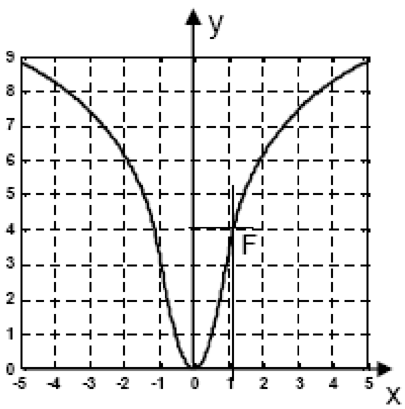


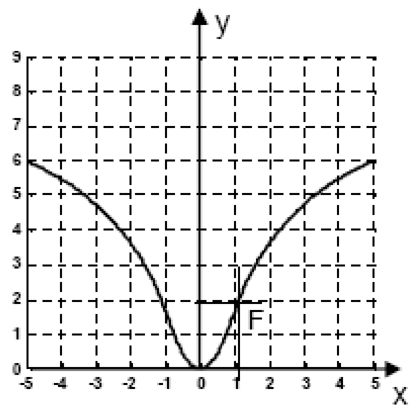


- *Dire (motivando la scelta con opportune ragioni teoriche) quale dei tre grafici sottostanti può essere il grafico della funzione integrale*

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$$







Quesito A2

Si consideri la funzione (dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$h(x) = e^{2x+3e^{\alpha x}} - e^{2x}$$

Si calcolino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ risulti un valore finito diverso da 0, e, per i valori di α trovati, dire quanto vale tale limite.

Quesito A3

Si considerino le funzioni, definite, al variare di $k \in \mathbb{R}$, da

$$f_k(x) = (-1)^{k+1}\left[\frac{10}{\pi}x - (2k+1)\right] \ se \ \frac{k\pi}{5} \le x \le \frac{(k+1)\pi}{5}$$

e si definisca la funzione $f(x)$, con dominio $\left[0; \frac{4}{5}\pi\right]$ definita a tratti attraverso le funzioni $f_k(x)$, per $k = 0,1,2,3$.

a) *Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$, e, nello stesso sistema di assi cartesiani, un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \cos 5x$.*

b) *Disegnare un grafico qualitativo della funzione $|f(x)|$, e, nello stesso sistema di assi cartesiani, un grafico qualitativo della funzione $|g(x)|$.*

c) *Calcolare gli integrali definiti*

$$\int_0^{\frac{4}{5}\pi} [g(x) - f(x)]\,dx, \quad \int_0^{\frac{4}{5}\pi} [|g(x)| - |f(x)|]\,dx.$$

Quesito A4

Una Ditta confeziona maglie utilizzando un macchinario che ha difettosità di $1/30$. La Ditta prepara scatole contenenti 20 maglie ciascuna, scelte a caso tra le (infinite) maglie che escono dal macchinario.

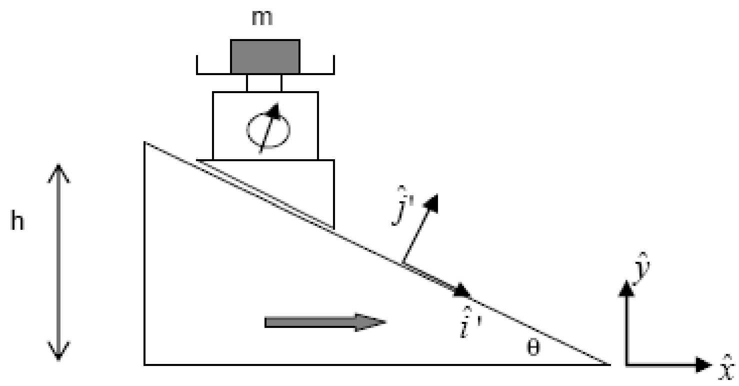
(a) *Calcolare la probabilità che una scatola scelta a caso contenga almeno una maglia mal confezionata.*

Un commerciante acquista 5 scatole (da 20 maglie) scelte in modo casuale dalla Ditta, con l'accordo che le 5 scatole verranno sostituite se egli troverà più di 2 scatole che contengono almeno una maglia mal confezionata.

(b) *Calcolare la probabilità che una scatola (tra le 5 acquistate) contenga almeno una maglia mal confezionata (mentre le altre 4 scatole contengono tutte maglie ben confezionate).*

(c) *Calcolare la probabilità che le 5 scatole vengano sostituite.*

PROBLEMA GRUPPO B

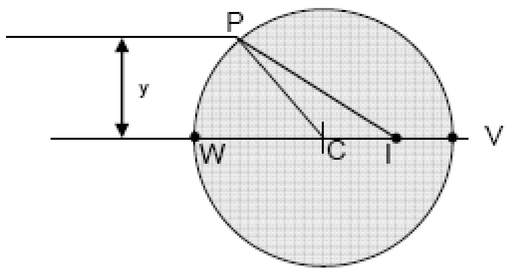


Una slitta scivola senza attrito su un piano inclinato inizialmente immobile, partendo da ferma all'istante $t = 0$ *da un punto a quota h. Sulla slitta è posta una bilancia a molla su cui è appoggiato una cassa C di massa m. La massa della slitta e della bilancia è trascurabile rispetto a m.*

1. *Calcolare il tempo impiegato dalla slitta per arrivare a terra, la velocità finale e il peso di C (in N) indicato dalla bilancia durante la discesa.*
2. *Ripetere il calcolo delle precedenti quantità supponendo che il piano inclinato si sposti verso destra su una piattaforma orizzontale con velocità* v_t *costante. È richiesta la velocità finale della slitta rispetto al piano inclinato.*
3. *Ripetere il calcolo delle precedenti quantità supponendo che il piano inclinato si sposti verso destra su una piattaforma orizzontale con accelerazione* a_t *costante, iniziando il suo moto a* $t = 0$. *È richiesta la velocità finale della slitta rispetto al piano inclinato e quella assoluta (rispetto al laboratorio).*
4. *Determinare la condizione da imporre ad* a_t *affinché la slitta scivoli verso l'alto invece che verso il basso.*

QUESITI GRUPPO B

Quesito B1



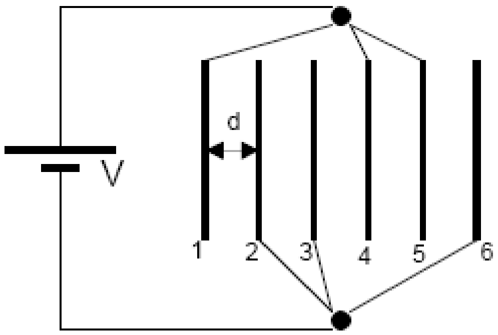
Un fascio di raggi luminosi paralleli in aria incide su una sfera dielettrica di raggio R e indice di rifrazione n. I raggi prossimi all'asse $(y \ll R)$ *vengono focalizzati nel punto V. Determinare l'indice di rifrazione della sfera.*

In queste condizioni, descrivere cosa accade ai raggi caratterizzati da y non piccolo. Indicare qualitativamente i punti di intersezione di tali raggi con l'asse x.

Quesito B2

Si considerino sei fogli metallici di area $S = 10\,cm^2$ *e spessore trascurabile posti a distanza* $d = 3\,mm$ *l'uno dall'altro, come indicato in figura. I fogli* 1, 4 *e* 5 *sono collegati al polo positivo di una batteria da* $V = 10\,V$ *, i restanti* 2, 3 *e* 6 *al negativo.*

Calcolare la capacità equivalente del sistema e la carica indotta su ciascun foglio. Calcolare inoltre il campo elettrico $\vec{E}_{12}$ *presente tra i fogli* 1 *e* 2 *e* $\vec{E}_{23}$ *presente tra i fogli* 2 *e* 3*, trascurando l'effetto della dimensione finita dei fogli.*



Quesito B3

In una regione di spazio vuoto è presente un campo elettrostatico definito da $E_x = -ay$, $E_y = -ax$, $E_z = 0$*, con* $a = 3 \cdot 10^7\ V/m^2$.

Nel punto P_0 *di coordinate* $x_0 = 3\,cm$, $y_0 = 3\,cm$ *viene abbandonato con velocità nulla uno ione di massa* $m = 2 \cdot 10^{-26}\,kg$ *e carica* $q = 3.2 \cdot 10^{-19}\,C$.

Determinare il tipo di moto che compie lo ione e la velocità v_0 *con cui passa per l'origine.*

Quesito B4

Un cilindro con un pistone a tenuta stagna contiene n moli di gas perfetto monoatomico a temperatura T_A *e pressione* p_A*. Dapprima lo si pone a contatto con diverse fonti di calore ed il suo volume si espande fino a* V_B *mantenendo la pressione costante. Poi ponendolo a contatto con altre sorgenti di calore a temperature inferiori lo si riporta a temperatura* T_A *tenendo il suo volume costante e lasciando la pressione libera di cambiare. A questo punto si pone il cilindro in un termostato alla temperatura* T_A *e si comprime lentamente il pistone fino a che il volume ritorna quello iniziale. Determinare i lavori* L_{AB}, L_{BC} *ed* L_{CA} *compiuti dal gas nelle tre trasformazioni.*

Si ricordi che la costante del gas perfetto vale $R = 8.314\,J/\left(°K\,mol\right)$.

Dati: $n = 0.5\,mol$ *;* $p_A = 4.1 \cdot 10^5\ Pa$ *;* $T_A = 300°K$ *;* $V_B = 2V_A$.

Tempo a disposizione : 4 ore