

LICEO SCIENTIFICO STATALE "Leonardo da Vinci" MAGLIE

VIII CERTAMEN FISICO - MATEMATICO "FABIANA D'ARPA"

11 maggio 2009

I CANDIDATI RISOLVANO

- IL PROBLEMA DEL GRUPPO A oppure IL PROBLEMA DEL GRUPPO B (a scelta)
- DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO A e DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO B.

PROBLEMA GRUPPO A

È data la funzione

$$f(x) = 3x + 1 + \sqrt{2x^2 - 2 + |2x^2 - 2|}$$

- a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- b) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo (relativi e assoluti) di $f(x)$.
- c) Discutere la continuità e la derivabilità di $f(x)$.
- d) Discutere la concavità e la convessità di $f(x)$.
- e) Provare che $f(x)$ ha un solo zero.
- f) Tenendo conto dei risultati ottenuti nei punti precedenti, disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.
- g) Trovare un intervallo $[a;b]$ in cui si abbia $f(a) = f(b)$, ma non si possa applicare il teorema di Rolle a $f(x)$ (indicare esplicitamente i valori di a e b).

QUESITI GRUPPO A

Quesito A1

Sia $f(x)$ derivabile due volte con derivata seconda continua su $I = [0;3]$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 0$$

Provare che esiste almeno un valore $c \in [1;2]$ per cui $f''(c) = 0$.

Quesito A2

Si consideri la funzione $f(x) = e^{2x} + x$, e si indichi con $g(x)$ sua restrizione all'intervallo $I = [-1; 1]$.

- Provare che $g(x)$ ha uno e un solo zero.
- Provare che $g(x)$ è invertibile, e trovare il dominio della sua inversa g^{-1} .
- Provare che g^{-1} è derivabile, e calcolare $(g^{-1})'(1)$ (la derivata di g^{-1} calcolata in 1).

Quesito A3

Sia $h(t)$ una funzione continua e strettamente positiva su \mathbb{R} .

Si considerino le due funzioni

$$H_1(x) = \int_{e^x}^x h(t) dt \quad e \quad H_2(x) = \int_{e^x}^1 h(t) dt$$

- Provare che $H_1(x)$ e $H_2(x)$ sono derivabili su tutto \mathbb{R} .
- Provare che i grafici di $H_1(x)$ e $H_2(x)$ hanno un solo punto in comune.

Quesito A4

Noè ha scelto 50 specie di animali, e di ogni specie ha scelto un maschio e una femmina, per farli salire sulla sua arca. Sull'arca ha costruito 50 stalle numerate, ognuna per due animali. Davanti all'arca i 100 animali si presentano in ordine casuale, mescolati sia per genere che per specie.

Egli fa entrare gli animali a due a due e li sistema progressivamente nelle stalle, iniziando con la prima e finendo con la cinquantesima.

- Dire in quanti modi le stalle possono essere occupate da coppie di animali qualunque, senza tenere conto di genere e di specie.
- Calcolare la probabilità che tutte le stalle siano occupate da animali della stessa specie.
- Calcolare la probabilità che tutte le stalle contengano un maschio e una femmina (anche di specie diverse).

PROBLEMA GRUPPO B

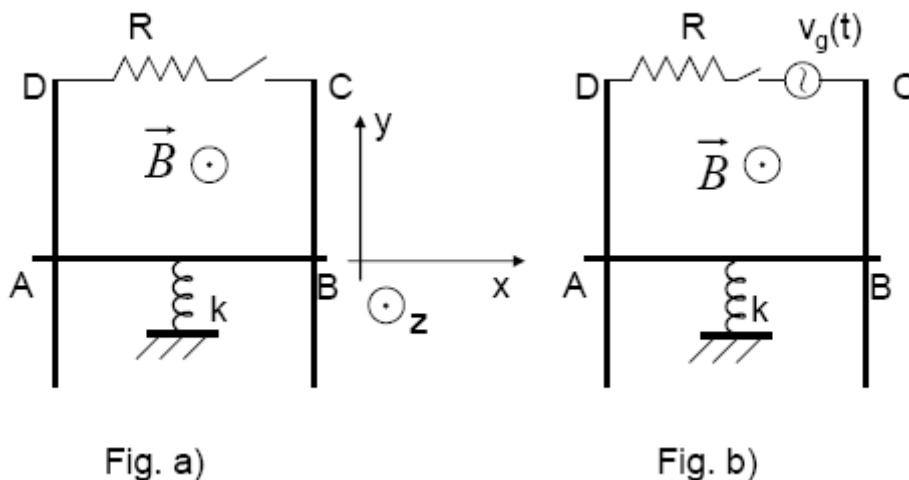


Fig. a)

Fig. b)

Si consideri il circuito di Fig. a), costituito da due rotaie metalliche parallele su cui scorre l'asta AB con attrito trascurabile. La resistenza elettrica di tutto il circuito vale R e si può considerare concentrata nel ramo superiore CD , dove è presente anche un interruttore, inizialmente aperto. L'asta AB , di massa m e lunghezza L , è vincolata a un supporto tramite una molla di costante elastica k . La molla è elettricamente isolata dall'asta.

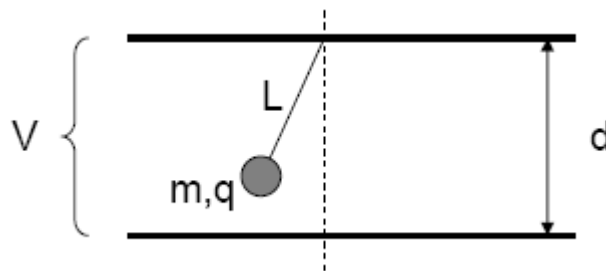
L'asta viene spostata in $y = y_0 > 0$ dalla sua posizione di equilibrio $y = 0$ e poi rilasciata al tempo $t = 0$.

1. Descrivere il moto dell'asta, in particolare scrivere l'espressione della sua posizione $y(t)$.
2. La stessa operazione è ripetuta, con l'interruttore sempre aperto, quando la struttura si trova immersa in un campo magnetico \vec{B} , statico e uniforme, perpendicolare al piano del circuito ed uscente dal foglio.
Descrivere il moto dell'asta in queste condizioni. Si verifica che tra i due estremi dell'asta AB si stabilisce una differenza di potenziale $V_{AB}(t)$: calcolare la sua espressione in funzione dei parametri della struttura.
3. Successivamente l'interruttore viene chiuso, mantenendo attivo il campo magnetico, e l'asta AB è rimessa in movimento come fatto precedentemente.
Descrivere qualitativamente il moto dell'asta in queste condizioni. In particolare, qual è l'influenza del valore della resistenza R ?
4. Come indicato in Fig. b), sul ramo CD è inserito un generatore di tensione sinusoidale con forza elettromotrice $v_g(t) = v_{g0} \cos(2\pi ft)$. Il campo magnetico è sempre attivo e l'asta è posta nella sua posizione di equilibrio $y = 0$.
Descrivere qualitativamente che cosa succede quando l'interruttore viene chiuso al tempo $t = 0$. In particolare, discutere il ruolo giocato dalla frequenza f del generatore.

QUESITI GRUPPO B**Quesito B1**

Una sfera di massa $m = 0.01$ kg e carica elettrica $q > 0$, sospesa a un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L , compie piccole oscillazioni tra le armature di un condensatore a facce piane parallele orizzontali distanti $d = 2$ m, tra le quali si stabilisce una differenza di potenziale $V = 105$ V. Le frequenze f_+ e f_- del pendolo quando il campo elettrico è diretto verso il basso o verso l'alto sono tali che

$$f_+^2 + f_-^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 19.6 \text{ Hz}^2.$$



Si domanda:

- La lunghezza L del filo
- Il valore della carica q per cui $f_+^2 - f_-^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0.5 \text{ Hz}^2$
- Come la quantità $f_+^2 - f_-^2$ dipende dalla latitudine.

Quesito B2

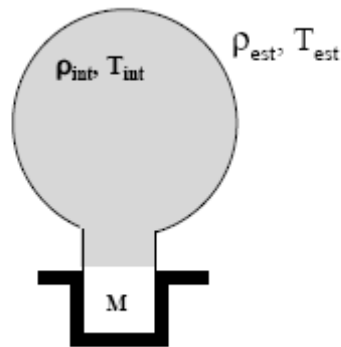
Un'astronave ruota intorno alla Terra in un'orbita circolare di raggio R_1 .

- Calcolare la velocità v_1 dell'astronave.
- L'astronauta accende i motori per un brevissimo intervallo di tempo, in modo da raggiungere pressoché e istantaneamente la velocità v_2 . Calcolare il massimo valore v_M di v_2 per cui il razzo non sfugge all'attrazione terrestre.

Dati: Massa della Terra $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg, Costante gravitazionale $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $R_1 = 6500$ km. La massa dell'astronave è trascurabile rispetto a quella della Terra.

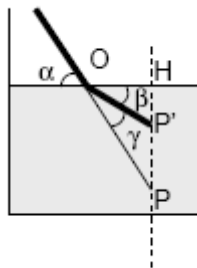
Quesito B3

Calcolare il volume del pallone di una mongolfiera che deve mantenere sospesa a una certa quota una navicella con massa complessiva $M = 300 \text{ kg}$ (comprensiva della massa del pallone). L'aria si può modellizzare come un gas perfetto con massa molare $m = 29 \text{ g/mol}$. La densità dell'aria esterna alla mongolfiera è $\rho_{\text{est}} = 1 \text{ kg/m}^3$ e la sua temperatura è $T_{\text{est}} = 7^\circ\text{C}$. L'aria riscaldata all'interno del pallone ha la temperatura $T_{\text{int}} = 107^\circ\text{C}$.

**Quesito B4**

Un'asticella è immersa parzialmente in acqua (indice di rifrazione $n = 1.33$) e forma un angolo $\alpha = 30^\circ$ con la superficie dell'acqua. Per effetto della rifrazione essa appare piegata nel punto in cui entra in acqua.

Trovare il valore dell'angolo apparente γ tra i due tratti rettilinei dell'asticella.



Tempo a disposizione : 4 ore