LICEO SCIENTIFICO STATALE "*Leonardo da Vinci*" MAGLIE

IX CERTAMEN FISICO – MATEMATICO "FABIANA D'ARPA"

03 maggio 2010

I CANDIDATI RISOLVANO

- *IL PROBLEMA DEL GRUPPO A oppure IL PROBLEMA DEL GRUPPO B (a scelta)*
- *DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO A* e *DUE QUESITI (a scelta) DEL GRUPPO B.*

PROBLEMA GRUPPO A

a) *Studiare brevemente (limitandosi all'uso della derivata prima) la funzione, definita per* $x \geq 0$

$$f_e(x) = x^e \cdot e^{-x}$$

dove e indica il numero di Nepero (base dei logaritmi naturali).

b) *Studiare (limitandosi all'uso della derivata prima) le funzioni (definite per* $x \geq 0$ *)*

$$f_a(x) = x^a \cdot a^{-x}$$

con $a \in \mathbb{R}$ *,* $a > 1$*,* $a \neq e$ *: in particolare provare che hanno un punto di massimo assoluto, e che il massimo assoluto di tutte le* $f_a(x)$ $(con\ a \in \mathbb{R}, a > 1, a \neq e)$ *è strettamente maggiore di* 1.

c) *Provare che, se* $a > 1$*,* $a \neq e$ *, l'equazione* $x^a = a^x$ *ha sempre un'altra soluzione, oltre alla soluzione* $x = a$ *.*

QUESITI GRUPPO A

Quesito A1

Siano $f(x)$*,* $g(x)$ *due funzioni derivabili su* $\mathbb{R}$ *.*

(1) *Trovare due esempi che illustrino queste due affermazioni :*

(a) da $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *, non segue necessariamente che* $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *;*

(b) da $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *, non segue necessariamente che* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *.*

(2) *Provare che se* $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *e se* $f(0) = g(0)$*, allora* $f(x) \leq g(x)$ *per* $x > 0$*, mentre* $f(x) \geq g(x)$ *per* $x < 0$ *.*

(3) *Provare che la condizione* $f(0) = g(0)$ *è indispensabile affinché sia valida la proposizione* (2).

Quesito A2

Sia $E(t)$ *la funzione parte intera del numero reale t, definita come il più grande intero relativo minore o uguale a t.*

a) *Rappresentare graficamente la funzione* $f(t) = E(t)$, *per* $t \in (-2;2)$.

b) *Rappresentare graficamente la funzione* $g(x) = \sin x + \cos x$, *per* $x \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{7}{4}\pi\right)$

(Si suggerisce di utilizzare opportune formule trigonometriche).

c) *Rappresentare graficamente la funzione* $h(x) = E(\sin x + \cos x)$, *per* $x \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{7}{4}\pi\right)$.

d) *Calcolare* $\int_0^\pi x \cdot h(x)\,dx$.

Quesito A3

Del polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = x^{100} + a_{99}x^{99} + a_{98}x^{98} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

si sa che ammette come radici tutti i cento numeri naturali da 1 *a* 100.

Dire (motivando opportunamente la risposta) quali sono le ultime diciotto cifre decimali del numero $N = p(107) + 123456789123456789111$.

Quesito A4

Nel gioco del Lotto ogni settimana vengono estratte 5 *palline da un'urna contenente* 90 *palline, numerate da* 1 *a* 90.

Il signor Rossi decide di giocare il terno secco 1 – 2 – 3.

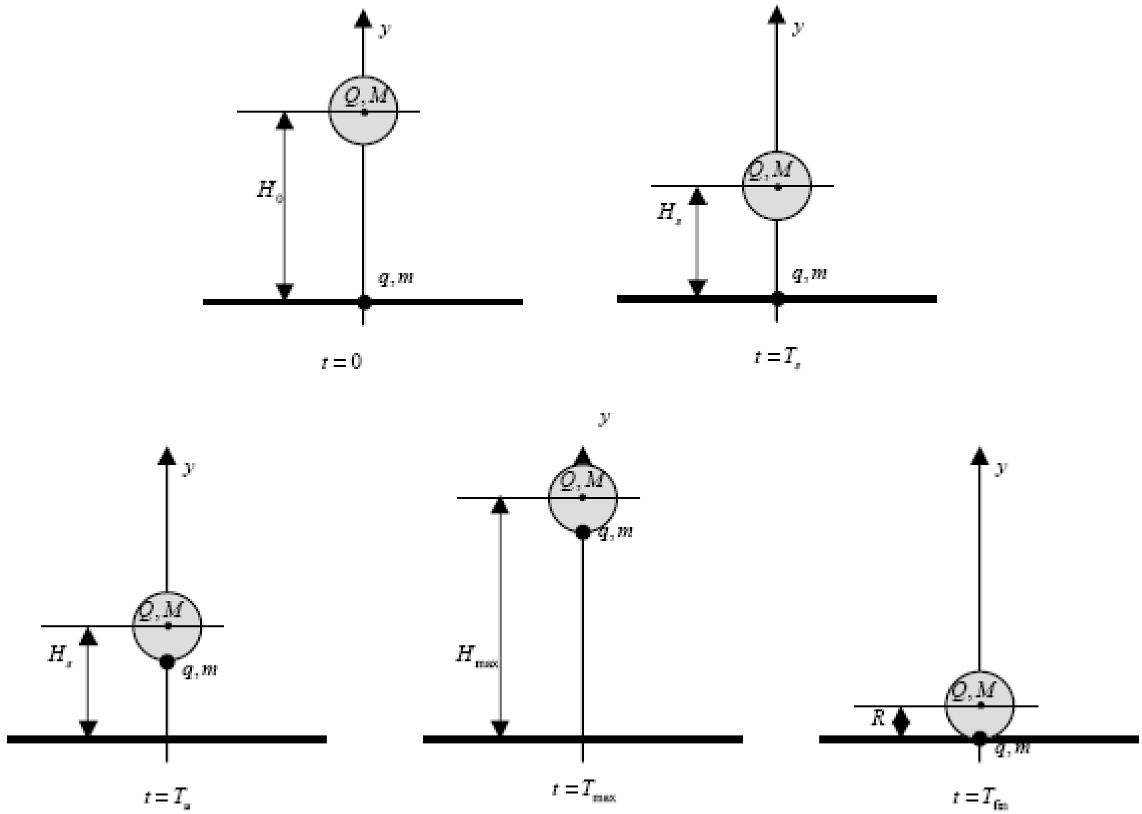
(a) *Qual è la probabilità che venga estratto il suo terno.*

La settimana successiva, il signor Rossi, volendo aiutare la fortuna, riesce a introdurre nottetempo nell'urna altre 3 *palline con i numeri* 1 – 2 – 3.

(b) *Qual è la probabilità che il trucco venga scoperto* ?

(c) *Qual è la probabilità che venga estratto il suo terno (senza che il trucco venga scoperto)* ?

PROBLEMA GRUPPO B



Su di un tavolo orizzontale è appoggiata una massa puntiforme m su cui è presente una carica positiva q. Al di sopra di essa si trova una sfera di plastica di raggio R e massa M, contenente nel suo centro una carica puntiforme negativa di modulo q. La sfera è inizialmente immobile, con il suo centro ad altezza H_0 rispetto al tavolo.

All'istante $t = 0$ essa inizia a scendere con velocità costante V lungo la verticale, verso m. All'istante $t = T_s$ la massa m si stacca dal tavolo, e inizia a salire verso la sfera M, che in quell'istante viene fermata alla quota H_s. La massa m sale verso M fino ad urtarla all'istante a $t = T_u$, con un urto completamente anelastico : il sistema costituito dalle due masse, con carica totale nulla, sale liberamente, senza ruotare, fino alla quota massima $H_{\max}$ all'istante $t = T_{\max}$, dopo di che ridiscende, sempre in caduta libera, fino a colpire il tavolo all'istante $t = T_{fin}$.

Scegliendo un sistema di riferimento con l'asse y verticale, diretto verso l'alto e l'origine sul tavolo, trovare:

1. *Tutte le forze che agiscono sulla massa m all'istante iniziale $t = 0$ (modulo, direzione e verso).*
2. *Il valore di T_s e la quota H_s a cui M viene fermata quando la massa m si stacca dal tavolo.*
3. *La forza che occorre applicare per mantenere costante la velocità di discesa della sfera M e il lavoro totale da essa compiuto.*
4. *La velocità v_u con cui m urta M.*
5. *La quota massima $H_{\max}$ raggiunta dal sistema costituito dalle due masse e l'intervallo di tempo $T_{fin} - T_u$.*

Dati :

$M = 0.1\,kg$, $m = 2\,kg$, $V = 0.06\,m/s$, $q = 2 \cdot 10^{-5}\,C$, $H_0 = 0.5\,m$, $R = 0.02\,m$, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^{9}\ Nm^2/C^2$

QUESITI GRUPPO B

Quesito B1

Un frigorifero viene utilizzato per congelare acqua che si trova a $0°C$ *scambiando calore con l'ambiente a* $40°C$. *Assumendo che il frigorifero sia una macchina ciclica reversibile operante tra le due sorgenti di calore e che il costo dell'energia elettrica sia* $C = 0.08\ €/kWh$, *si calcoli quanto costa congelare* 100 *litri di acqua.*

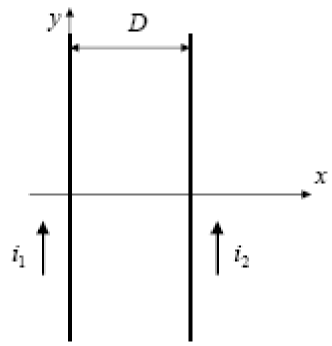
Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda_{gh} = 3.3 \cdot 10^5\ J/kg$.

Quesito B2

Un proiettile di piombo di massa $m = 0.05\,kg$ *alla temperatura* $T_{Pb} = 20°C$, *dotato di velocità* $v_0 = 100\ m/s$ *urta in modo anelastico un blocco di ghiaccio fondente* $\left(T_{gh} = 0°C\right)$, *conficcandosi in esso. Il blocco di ghiaccio è mantenuto immobile. Sapendo che il calore specifico del piombo è* $C_{Pb} = 130\,J/\left(kg°C\right)$ *ed il calore latente di fusione del ghiaccio è* $\lambda_{gh} = 3.3 \cdot 10^5\ J/kg$, *si calcoli la massa di ghiaccio che si è fusa.*

Quesito B3

Due conduttori filiformi di lunghezza indefinita hanno gli assi paralleli distanti $D = 10\,cm$ *e sono percorsi dalle correnti* $i_1 = 10A$ *e* $i_2 = 15A$. *Dire che direzione e che verso ha il campo magnetico* $\vec{B}(x)$ *sull'asse x in figura, nello spazio tra i due conduttori* $\left(0 \le x \le D\right)$, *ricavare l'espressione del suo modulo e farne il grafico. Esiste un punto in cui il campo magnetico è nullo* ?



Quesito B4

Un elettrone libero entra con velocità $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_y}$ *nella regione* $y > 0$ *dove è presente un campo elettrostatico uniforme* $\vec{E} = E\,\overrightarrow{u_x}$. *All'ingresso le sue coordinate sono* $(0;0)$ *e non ci sono altre forze agenti sull'elettrone.*

1. *Sapendo che l'elettrone passa per il punto P di coordinate* $\left(x_P = 0.08\,m; y_P = 0.1\,m\right)$, *quanto vale il campo elettrico* ?
2. *Quanto vale nella regione* $y > 0$ *l'accelerazione della particella* ?
3. *Quale campo magnetostatico* $\vec{B}$ *(modulo direzione e verso) deve essere applicato nella regione* $y > 0$ *per far sì che il moto dell'elettrone continui ad essere rettilineo uniforme ?*

Dati: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$ *;* $m = 10^{-30}\,kg$ *;* $v = 100\ km/s$.

Tempo a disposizione : 4 ore